Available online at: http://ejournal.radenintan.ac.id/index.php/desimal/index

Desimal: Jurnal Matematika,2(1), 2019, 69-76

Program Linier Parametrik

Adolf T. Simatupang
Politeknik Negeri Bandung, Jl. Gegerkalong Hilir, Ciwaruga, Parongpong, Kabupaten Bandung Barat, Jawa Barat 40559
**Corresponding Author*. E-mail: adolf.juan@yahoo.com

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk membahas suatu masalah program linier dimana konstanta-konstantanya dapat berubah – ubah, jika suatu konstanta pada masalah program linier dirubah, maka kita tidak perlu menghitung mulai dari awal lagi. Selanjutnya akan mengkaji sifat-sifat fungsi objektifnya akibat dari perubahan konstanta tersebut. Dalam pembahasan ini menentukan “nilai kritis” non negatif yang memberikan solusi optimal untuk masalah program linier parametrik. Pencarian nilai kritis pada program linier parametrik dilakukan dengan metode versi matriks.
Kata kunci: Fungsi Objektif; Parametrik; Konstrain; Nilai Kritis; Solusi Optimal

Abstract

This study aims to discuss a linear program problem where its constants can change, If a constant for a linear program problem is changed, then we don't need to count from the beginning again. Next, we will examine the properties of the objective function as a result of changes in these constants. In this discussion determine the non-negative "critical value" which provides the optimal solution to the problem of parametric linear programs. Searching for critical values in parametric linear programs is done by the matrix version method.
Keywords: *Constraint; Critical Value; Objective Function; Optimal Solution; Parametric*

PENDAHULUAN

Pada masalah program linier, koefisien fungsi objektif maupun koefisien pembatasnya selalu konstan. Masalah program linier ini dapat diselesaikan dengan metoda simpleks biasa. Jika kita ingin merubah suatu nilai dari konstanta-konstanta yang ada, baik itu konstanta fungsi objektif maupun konstanta pembatas, maka kita akan mulai menghitung dari awal lagi, untuk menghasilkan solusi optimum. Maka diperlukan suatu solusi agar dapat menentukan soluso optimum.

Berdasarkan beberapa penelitian yang telah dilakukan sebelumnya penerapan program linier telah digunakan dalam beberapa penelitian. (Indriani, Suyitno, & Mashuri, 2013; Suwirmayanti, 2017; Windarti, 2013) Namun, belum adanya penelitian yang membahas mengenai program linier parametrik. Berdasarkan penelitian terdahulu keterbaruan penelitian ini terletak pada penentuan “nilai kritis” non negatif yang memberikan solusi optimal untuk masalah program linier parametric. Maka, tujuan penelitian ini adalah untuk membahas mengenai program linier parametrik

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian studi pustaka. Penelitian ini mengambil dari beberapa buku sebagai referensi (Ayres, 1984; Dhawan, 1975; Hadly, 1962; Taha, 2003)

HASIL DAN PEMBAHASAN

PROGRAM LINIER FUNGSI OBJEKTIF PARAMETRIK

Masalah program linier sebelum diberi parameter adalah

Maks z = C X

terhadap (A, I) X = P_0, $P_0 \geq 0$

X ≥ 0

Disini kita membahas variasi linier vektor C. Misalkan θ ≥ 0 adalah parameter variasi. Maka fungsi-fungsi linier dalam koefisien program linier di atas menjadi:

$^{\theta}C = {}^{0}C + \theta \cdot E$

$= ({}^{0}C_1, {}^{0}C2, \ldots, {}^{0}C_{m+n}) + \theta\, (e_1, e_2, e_{m+n})$ ... (1.1)

Konstanta-konstanta °C, E diketahui. Disini kita meninjau θ ≥ 0. Untuk θ ≤ 0 peninjauannya dilakukan dengan cara yang sama.

Perhatikan bahwa ^{0}C diperoleh dari fungsi- fungsi di atas dengan mengambil θ = 0.

Selanjutnya masalah yang kita tinjau adalah masalah memaksimumkan, sedangkan masalah meminimumkan dapat ditinjau dengan cara yang sama.

VARIASI LINIER PADA VEKTOR C

Tahap pertama untuk θ = 0, yaitu diambi C = °C Misalkan $X_B = {}^{\circ}B^{-1}\, P_0$, solusi optimalnya Maka untuk iterasi optimalnya berlaku:

$^{\circ}Z_j - {}^{\circ}C_j \geq 0$, untuk semua vektor non basis P_j, yaitu $^{\circ}C_B \cdot {}^{\circ}B^{-1} \cdot P_j - {}^{\circ}C_j \geq 0$, untuk semua vektor non basis P_j.

Kemudian kita meninjau masalah program linier untuk θ > 0, dimana °C = °C + θ E

Dari definisi matriks pada Tabel simpleks, setiap variasi pada C hanya mempengaruhi koefisien koefisien fungsi objektif, yaitu $Z_j - C_j$. Koefisien itu hanya keoptimalan yang perlu diselidiki. Prosedur ini akan menentukan nilai θ berturut turut dimana solusi basis optimal berubah Nilai θ ini disebut nilai kritis dengan θ ≥ 0.

Pada nilai θ = 0, solusi optimalnya $^{\circ}X_B$.

Pada nilai θ = α, misalkan solusi optimalnya diketahui $^{0}X_B$.

Kita akan menenukan nilai kritis berikutnya β, α < β untuk θ ≥ α berlaku:

$^{e}C_B = {}^{\circ}C_B + \theta\, {}^{\circ}E_B$

$= {}^{\circ}C_B + \alpha\, E_B + \theta \cdot E_B - \alpha\, E_B$

$= {}^{0}C_B + (\theta\text{-}\alpha)\, E_B$

Demikian juga untuk 0 ≥ α

$^{\theta}Cj = {}^{\alpha}Cj + (\theta - \alpha)\, ej$

Jadi $^{\theta}Zj - {}^{\theta}C_j = {}^{\theta}C_B \cdot {}^{\alpha}B^{-1}\, Pj - {}^{\theta}C_j$

$= \{{}^{\alpha}C_B + (\theta - \alpha)\, E_B\}\, {}^{\alpha}B^{-1}\, .\, Pj\, \{{}^{\alpha}Cj + (\theta\text{-}\, \alpha)\, e_j\}$

$= {}^{\alpha}C_B \cdot {}^{\alpha}B^{-1}\, Pj - {}^{\alpha}Cj + (\theta - \alpha)\, (E_B - {}^{\alpha}B^{-1}\, P_j - ej)$

$= ({}^{\alpha}Zj - {}^{\alpha}Cj) + (\theta - \alpha)\, (E_B \cdot {}^{\alpha}B^{-1}\, Pj - e_j)$ (1.1.1)

Supaya solusi menjadi optimal untuk θ≥α, maka kondisi $^{\alpha}Zj - {}^{\alpha}Cj \geq 0$ harus berlaku untuk setiap j. Karena $^{\alpha}Zj - {}^{\alpha}Cj \geq 0$, maka dari (1.1.1) diperoleh:

(1) Bila $(E_B\ \ {}^{\alpha}B^{-1}\, Pj\ ej) \geq 0$, Vj, maka kondisi optimal dipenuhi dan $^{\alpha}X_B$ tetap soiusi optimal untuk θ ≥ α.

(2) Bila $(E_B\ \ {}^{\alpha}B^{-1} \cdot Pj \cdot ej) < 0$, untuk sekurang kurangnya satu j, maka terdapat nilai kritis θ =β yang diberikan oleh

$$\beta = \alpha + \min \left\{ \frac{-\left({}^{\alpha}Z_j - {}^{\alpha}C_j\right)}{E_B \cdot {}^{\alpha}B^{-1}\ \ P_j - e_j} \middle| \left(E_B \cdot {}^{\alpha}B^{-1}\ \ P_j - e_j\right) \right.$$

Ambil X_K variabel non basis yang berhubungan dengan β dimana β dihubungkan dengan minimal hasil bagi di atas, variabei X_K merupakan variabel masuk. Variabel basis yang berhubungan dengan nilai ratio minimum merupakan variabel keluar, sehingga Z_K - C_K = 0 pada θ =β.

Maksudnya bahwa pada 0 = p, ada solusi yang dipilih untuk 0 > p, di mana solusi basis "X_B (a < P) akan menjadi solusi optimal. Selanjutnya setelah diperoleh variabel masuk dan variabel keluar pada 0 = p, maka masalah program linier parametrik di atas diselesaikan dengan OBE (Operasi Baris Elementer), sehingga hasil-hasil optimal yang dipilih pada 0 = p adalah $^{P}X_B$.

Prosedur di atas diulang pada $^{\wedge}X_B$ untuk mendapatkan nilai kritis yang berturut-turut, maka pada range terakhir, yang mana ''Xg tetap optimal.

Contoh:

Tinjau masalah

Maks Z = $(3 - 6\theta)x_1 + (2 - 2\theta)x_2 + (5 + 50)x_3$

terhadap
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 430 \\ 3x_1 + 2x_3 + x_5 &= 460 \\ x_1 + 4x_2 + x_6 &= 420 \\ x_1, x_2, \ldots, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

Disini x_4, x_5, x_6 merupakan variabel-variabel slack, dan

$^{\theta}C = {}^{\circ}C + 0\ E = (3, 2, 5) + \theta\ (-6, -2, 5)$

Jika θ = 0, masalah program linier parametrik di atas diselesaikan dengan metode simpleks, maka Tabel solusinya sebagai berikut:

Tabel 1. Hasil Penyelesaian Nilai-Nilai Variabel

Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solusi
z	1	4	0	0	1	2	0	1350
x_2	0	–1/4	1	0	1/2	–1/4	0	100
x_3	0	3/2	0	1	0	1/2	0	230
x_6	0	2	0	0	–2	1	1	20

Dari Tabel 1. terlihat bahwa x_2, x_3, x_6 merupakan variabel basis sedangkan x_1, x_4, x_5 variabel tak basis, jadi:

$$^{O}X_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 230 \\ 20 \end{pmatrix}$$ dan

$$^{O}B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_B = (-2, 5, 0)$, $P_j = (P_1, P_4, P_5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

dan $e_j = (e_1, e_4, e_5) = (-6, 0, 0)$

Sekarang kita menentukan nilai θ = 0' > 0.

Apakah $(E_B\ {}^{\circ}B^{1}\ P_j - e_j) > 0$, V_j, $j \in J$.

J = himpunan indeks variabel non basis
= {1,4, 5}

$E_B \cdot {}^{\circ}B^{-1} \cdot Pj - e_j) =$
$$(-2, 5, 0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - (6, 0, 0) =$$
(14, –1, 3)

Variabel non basis yang mempunyai nilai $(E_B - {}^{\circ}B^{1} \cdot Pj - ej) < 0$ adalah x_4.

sehingga x_4 merupakan variabel masuk.

$$\text{Jadi } \theta' = \theta^0 + \left\{ \frac{-\left({}^{O}Z_4 - {}^{O}C_4\right)}{E_B \cdot {}^{O}B^{-1}\ P_4 - e_4} \right| = 0 + \frac{-1}{-1} = 1$$

Kemudian kita mencari variabel keluar dari Tabel 1.1.1. Karena x_4 merupakan variabel masuk, maka nilai ratio minimum adalah

$$= \min \left\{ \frac{100}{\frac{1}{2}}, -, - \right\} = 200$$

Jadi ratio minimum 200 adalah variabel x_2, sehingga variabel basis x_2 merupakan variabel keluar. Maka masalah program linier parametrik pada Tabel 1 diselesaikan dengan OBE, sehingga Tabel menjadi:

Tabel 2. Hasil Perhitungan OBE

Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solusi
z	1	18	0	0	0	5	0	2300
X_4	0	–1/2	2	0	1	–1/2	0	200
X_3	0	3/2	0	1	0	1/2	0	230
X_6	0	1	4	0	0	0	1	420

Cara menghitung koefisien persamaan fungsi objektif pada Tabel 2 sebagai berikut:

$^{0}z_j - {}^{0}c_j = ({}^{O}z_j - {}^{O}C_j) + \theta'\ (E_B \cdot {}^{O}B^{-1} \cdot P_j - e_j)$

maka:

$^{\theta}z_1 - {}^{\theta}c_1 = 4 + 1(14) = 18$

$^{\theta}z_4 - {}^{\theta}c_4 = 1 + 1\ (-1) = 0$

$^{\theta}z_5 - {}^{\theta}c_5 = 2 + 1\ (3) = 5$

Dari Tabel 1.1.2 terlihat bahwa x_4, x_3, x_6 merupakan variabel basis. Sedangkan x_1, x_2, x_5 variabel tak basis, Jadi:

$$^{O}X_B = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 230 \\ 420 \end{pmatrix} \text{ dan } ^{O}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

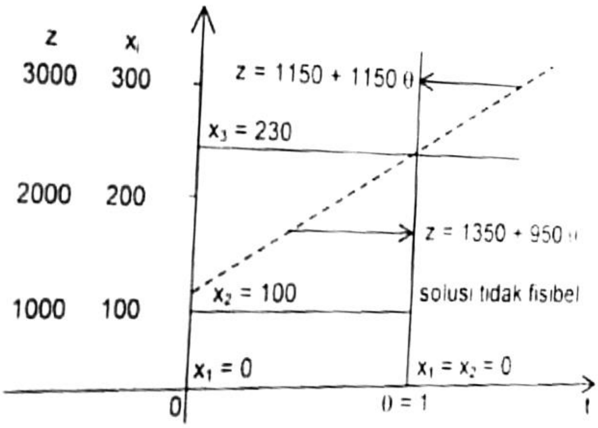
$E_B = (0, 5, 0)$, $P_j = (P_1, P_2, P_5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ dan

$e_j = (e_1, e_2, e_5) = (-6, -2, 0)$

Sekarang kita menentukan nilai $\theta = \theta'' > \theta''$
Apakah $(E_B - {}^{0''}B^{-1} \cdot P_j - e_j) \geq 0$, v_j, $j \in J$,
$J = \{1, 2, 5\}$
$(E_B \cdot {}^{0''}B^{-1} \cdot P_j - e_j) = (0, 5, 0)$ $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} - (-6, -2, 0) =$
$\left(\frac{27}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$

Karena $(E_B \cdot {}^{\theta}B^{-1} \cdot P_j - e_j) \geq 0$, $\forall_j$, $j \in J = (1, 2, 5)$, maka kondisi ${}^{\theta}zj - {}^{\theta}c_j \geq 0$ terpenuhi untuk semua $\theta \geq \theta' = 1$
Jadi solusi optimal telah tercapai untuk nilai $\theta > \theta' = 1$. Solusi optimal untuk $\theta > 0$ dapat dinyatakan seperti pada Gambar 1.

Untuk $0 < \theta < 1$, variabel-variabel basisnya adalah $X_B = (x_2, x_3, x_s)^T = (100, 230, 20)^T$
Maka $z = {}^{e}c_B \cdot {}^{\circ}X_B = (2 - 2\theta, 5 + 5\theta, 0)\begin{pmatrix} 100 \\ 230 \\ 20 \end{pmatrix}$
$= (1350 + 950\,\theta)$
untuk $\theta \geq 1$, $x_B = (x_4, x_3, x_6)^T = (200, 230, 420)^T$
Jadi $z = {}^{\theta}c_B \cdot {}^{\theta}x_B = (0{,}5 + 5\theta, 0)\begin{pmatrix} 200 \\ 230 \\ 420 \end{pmatrix} = 1150 + 1150\,\theta$



Gambar 1. Diagram Garis Solusi

Terlihat pada Gambar 1, koefisien keuntungan x_1 dan x_2 adalah menurun untuk semua θ, sehingga kedua variabel i merupakan variabel keluar dari solusi. Sedangkan variabel dari x_3 tetap merupakan variabel solusi karena koefisien keuntungan dari koefisien x_3 adalah naik untuk semua θ.
Apabila masalah program linier parametrik di atas dilanjutkan, maka:

${}^{\theta}c_B \cdot {}^{0''}B{-}1 = (0, 5 + 5\theta, 0)\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$\left(0, \frac{5+5\theta}{2}, 0\right)$
karena vektor-vektor P_1, P_2, dan P_5 adalah vektor-vektor non basis, maka:
${}^{B}z - {}^{\theta}c_j =$
$= {}^{\theta}c_B \cdot {}^{\theta''}B^{-1}(P_1, P_2, P_5)\ ({}^{\theta}C_1, {}^{\theta}C_2, {}^{\theta''}C_5)$
$= \left(0, \frac{5+5\theta}{2}, 0\right)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} - (3 - 6\theta, 2 - 2\theta, 0)$
$= \left(\frac{9+27\theta}{2}, -2 + 2\theta, \frac{5+5\theta}{2}\right)$
Jadi untuk $0 \geq 1$, ${}^{\theta}Z_j - {}^{\theta}c_j$ adalah non negatif.

PROGRAM LINIER KONSTRAIN KANAN PARAMETRIK

Masalah program linier sebelum diberi parameter adalah

Maks $z = C \cdot X$

terhadap $(A, I)\ X = P_0,\ P_0 > 0$

$X > 0$

Disini kita membahas variasi linier vektor P_0. Misalkan $\theta > 0$ adalah parameter variasi. Maka fungsi-fungsi linier dalam koefisien-koefisien program linier di atas menjadi:

$$^{\theta}P_0 = {}^{\theta}P_0 + \theta \cdot b = \begin{pmatrix} ^{O}P_{O1} \\ ^{O}P_{O2} \\ \vdots \\ ^{O}P_{Om} \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \ldots. \quad (1, 1)$$

Konstanta-konstanta $^{0}P_0$, b diketahui. Disini kita meninjau $\theta \geq 0$. Untuk $\theta \leq 0$ peninjauannya dilakukan dengan cara yang sama. Perhatikan bahwa ^{0}P diperoleh dari fungsi-fungsi di atas dengan mengambil $\theta = 0$.

Selanjutnya masalah yang kita tinjau adalah masalah memaksimumkan, sedangkan masalah meminimumkan dapat ditinjau dengan cara yang sama.

VARIASI LINIER PADA VEKTOR P_0

Parameter vektor $^{\theta}P_0$ didefinisikan sebagai berikut.

$^{\theta}P_0 = {}^{0}P_0 + \theta\, b$

Di mana $°P_0$ dan b adalah vekor vekor yang diketahui. Variasi pada vektor P_0 hanya dapat mempengaruhi kefisibelan masalah program linier parametrik.

Prosedur untuk menentukan nilai kritis θ dimulai dengan menggunakan solusi $^{0}X_B$, solusi yang berkaitan dengan $\theta = 0$.

Misalkan α dan β, dua nilai kritis yang berurutan dari θ ($\alpha \leq \beta$), di mana diasumsikan bahwa solusi basis pada θ = a, diketahui dan diberikan oleh $^{\alpha}X_B$. Kemudian kita menentukan nilai $\theta = \beta$, seperti berikut.

Solusi basis $^{\alpha}X_B$ akan tetap fisibel untuk range θ > a selama kondisi $^{\alpha}B^{-1} \cdot {}^{\theta}P_0 \geq 0$ dipenuhi. Sekarang $^{\alpha}B^{-1} \cdot {}^{\theta}P_0$ =

$= {}^{\alpha}B^{-1}\,({}^{0}P_0 + \theta\, b)$

$= {}^{\alpha}B^{-1} \cdot {}^{0}P_0 + \theta\, {}^{\alpha}B^{-1} \cdot b$

$= {}^{\alpha}B^{-1} \cdot {}^{0}P_0 + {}^{\alpha}B^{-1}\,\alpha\, b + {}^{\alpha}B^{-1}\,\theta\, b - {}^{\alpha}B^{-1}\,\alpha\, b$

$= {}^{\alpha}B^{-1}\,{}^{\alpha}P_0 + (\theta - \alpha) \cdot {}^{\alpha}B^{-1}\, b$

Misalkan $({}^{\alpha}B^{-1} \cdot {}^{\alpha}P_0)_i$ dan $({}^{\alpha}B^{-1} \cdot b)_i$ berturut-turut elemen ke-i dari $^{\alpha}B^{-1} \cdot {}^{\alpha}P_0$ dan $^{\alpha}B^{-1} \cdot b$.

Karena $^{\alpha}B^{-1}\,{}^{\alpha}P_0 \geq 0$, maka kondisi $^{\alpha}B^{-1} \cdot {}^{\alpha}P_0 \geq 0$ berlaku:

(1) Jika $({}^{\alpha}B^{-1} \cdot b)_i \geq 0$, untuk$\forall_i$ dan "X_B tetap fisibel untuk semua θ > a.
(2) Jika $({}^{\alpha}B^{-1} \cdot b)_i < 0$, untuk sekurang-kurangnya satu i, dan terdapat nilai kritis $\theta = \beta$ yang diberikan oleh $\theta = \beta$ =

$$\alpha + \min\left\{ \frac{-\left({}^{\alpha}B^{-1} \cdot {}^{\alpha}P_O\right)}{\left({}^{\alpha}B^{-1} \cdot b\right)_i} \,\middle|\, \left({}^{\alpha}B^{-1} \cdot b\right)_i < 0 \right\}$$

Jadi untuk $\theta > \beta$, $^{\beta}X_B$ tidak lagi fisibel. Pada $0 = \beta$ solusi basis lain $^{\beta}X_B$ dapat diperoleh dengan menggunakan dual metode simpleks, karena variabel yang dihubungkan dengan β merupakan variabel pertama yang tidak fisibel, maka variabel ini dipilih sebagai variabel keluar pada $\theta = \beta$.

Contoh:

Tinjau masalah program linier parametrik pada P_0.

Maks $Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$

terhadap $x_1 + 2x_2 + x_3 < 430 + 100\,\theta$

$3x_1 + 2x_3 = 460 - 200\,\theta$

$x_1, + 4x_2 + x_6 \quad = 420 + 400\,\theta$

$x_1, x_2, \ldots, x_6 \geq 0$

Di sini x_4, x_5, x_6 adalah variabel-variabel slack dan $^{\theta}P_0 = \begin{pmatrix} 430 \\ 460 \\ 420 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 100 \\ -200 \\ 400 \end{pmatrix}$

Jika $\theta = 0$ dan masalah program linier di atas di selesaikan dengan metode simpleks, maka Tabel solusinya sebagai berikut:

Tabel 3. Solusi Masalah

Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solusi
z	1	4	0	0	1	2	0	1350
x_2	0	−1/4	1	0	½	−1/4	0	100
x_3	0	3/2	0	1	0	1/2	0	230
x_6	0	2	0	0	−2	1	1	20

Menentukan nilai kritis pertama θ' > 0

Disini $^0X_B = \begin{pmatrix}100\\230\\20\end{pmatrix}$, dan $^0B^{-1} \cdot b =$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100\\-200\\400\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100\\-100\\0\end{pmatrix}$$

Maka θ’ = α + min

$$\left\{\frac{-\left({}^{O}B^{-1}\cdot P_O\right)}{\left({}^{O}B^{-1}\cdot b\right)_i}\middle|\left({}^{O}B^{-1}\cdot b\right)_i<0\right\}=0+\min\left(-,\frac{-230}{-100}\right)$$

= 23

Nilai kritis pertama θ' ini berhubungan dengan variabel basis x_3, sehingga x_3 merupakan variabel keluar,

Untuk θ' = 2,3, maka: $^\theta P_0 = {}^0P_0 + \theta\, b =$

$$\begin{pmatrix}430\\460\\420\end{pmatrix}+2{,}3\begin{pmatrix}100\\-200\\400\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}660\\0\\1340\end{pmatrix}$$

dan solusi basisnya adalah $^\theta X_B = {}^0B^{-1}\,{}^\theta P_0 =$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}600\\0\\1340\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}330\\0\\20\end{pmatrix}$$

Jadi solusi di atas dalam bentuk Tabel untuk 0 ≤ θ ≤ 2,3 sebagai berikut.

Tabel 4. Solusi Nilai-Nilai Variabel

Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solusi
z	1	4	0	0	1	2	0	660
x_2	0	−1/4	1	0	1/2	−1/4	0	330
x_3	0	3/2	0	1	0	1/2	0	0
x_6	0	2	0	0	2	1	1	20

Untuk 0 ≤ θ ≤ θ’, solusi tetap fisibel

$$\begin{pmatrix}x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = {}^0B^{-1}\,{}^\theta P_0 = {}^0B^{-1}\cdot{}^0P_0 + \theta\,{}^0B^{-1}\cdot b =$$

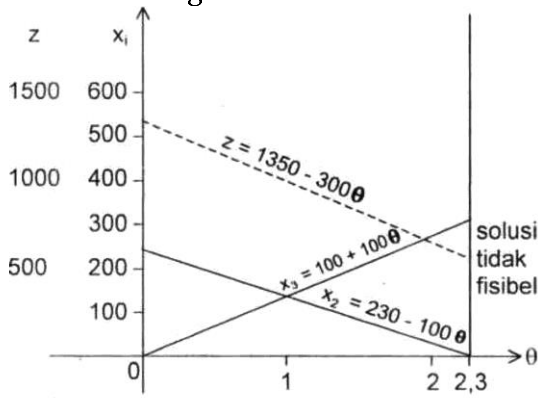
$$^0B^{-1}({}^0P_0 + \theta\, b) = \begin{pmatrix}100\\230\\20\end{pmatrix}+\theta'\begin{pmatrix}100\\-100\\0\end{pmatrix}$$

Pada θ = θ′ = 2, 3

$$^\beta X_B = \begin{pmatrix}330\\0\\20\end{pmatrix}$$

Untuk 0 > θ' = 2,3 maka pada konstrain kedua nilai x_3 < 0 sehingga masalah program linier di atas tidak fisibel untuk θ > θ' = 2,3. Jadi masalah program linier di atas tetap fisibel untuk 0 ≤ θ ≤ 2,3.

Hasil di atas dapat dinyatakan seperti Gambar 2 sebagai berikut.



Gambar 2. Diagram Solusi Variabel

PROGRAM LINIER KONSTRAIN KIRI PARAMETRIK

Masalah program linier sebelum diberi parameter adalah

Maks Z = C · X

terhadap (A, I) X = P_O, · P_O ≥ 0

X > 0

Disini kita membahas variasi linier vektor non basis P_J dari A. Misalkan θ > 0 adalah parameter variasi. Maka fungsi-fungsi linier dalam koefisien program linier di atas menjadi:

$^\theta P, = {}^0P, + \theta\, b_j$

Dimana vektor non basis P_j dari A, dan ^0P_j, b_j adalah vektor-vektor yang diketahui.

Disini kita meninjau θ > 0. Untuk θ < 0 peninjauannya dilakukan dengan cara yang sama.

Selanjutnya masalah yang kita tinjau adalah masalah memaksimumkan, sedangkan masalah meminimumkan dapat ditinjau dengan cara yang sama.

VARIASI-VARIASI PADA VEKTOR NON BASIS P_j DARI A

Parameter non basis ${}^{O}P_j$ diberikan sebagai berikut:

${}^{\theta}Pj = {}^{O}P_j + \theta\, b_j$

Dimana ${}^{O}P_j$ dan b_j adalah vektor-vektor yang diketahui.

Tahap pertama kita menyelesaikan program linier untuk θ = 0. Karena setiap perubahan vektor non basis P_j hanya mempengaruhi nilai Z_j -- C_j, maka kita hanya melihat keoptimalan P_j. Perubahan di sini, jika kita sudah memiliki nilai kritis pertama θ', vektor non basis P_j akan menjadi vektor basis untuk θ > θ'. Jadi pembahasan tidak dapat dilanjutkan keseluruhan range 0.

Sehingga pembahasan disini hanya menunjukkan bagaimana nilai θ'.

Tinjau ${}^{O}X_B$, selain basis optimal untuk 0 = 0.

Solusi ini akan tetap basis selama

$$\begin{aligned} {}^{O}Z_j - C_j &= C_B \cdot {}^{O}B^{-1} \cdot {}^{\theta}P_j - C_j > 0 \\ &= C_B \cdot {}^{O}B^{-1} \cdot ({}^{O}P_j + \theta\, b_j) - C_j \geq 0 \\ &= C_B \cdot {}^{O}B^{-1} \cdot {}^{O}P_j + \theta\, C_B \cdot {}^{O}B^{-1}\, b_j - C_j \geq 0 \end{aligned}$$

Karena ${}^{O}Z_j - C_j = C_B \cdot {}^{O}B^{-1} \cdot {}^{O}P_j - C_j \geq 0$, yaitu solusi optimal untuk θ = 0, maka diperoleh

(1) Jika $C_B \cdot OB{-}1 \cdot bj \geq 0$, untuk $\forall$j, OX_B tetap optimal untuk setia θ > 0.

(2) Jika $C_B \cdot OB{-}1 \cdot bj < 0$, untuk sekurang kurangnya satu j, maka terdapat nilai kritis θ' yang diberikan oleh

$$\theta' = \min\left\{ \frac{-\left({}^{O}Z_j - C_j\right)}{C_B \cdot {}^{O}B^{-1}\, b_j} \middle| C_B \cdot {}^{O}B^{-1}\, b_j < 0 \right\}$$

Dimana ${}^{O}X_B$ bukan lagi optimal.

Untuk θ = θ', solusi optimal lain didapat dengan memasukkan vektor non basis P_j yang berhubungan dengan θ' ke dalam solusi.

Contoh:

Tinjau masalah Maks $Z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$

terhadap $(1 + 0)\, x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$

$(3 - 0)\, x_1 + 2x_3 \leq 460$

$x_1 + 4x_2 \leq 420$

$x_1, x_2, x_3 > 0$

Untuk θ = 0, masalah program linier di atas dalam bentuk standarnya sebagai berikut

Maks $Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$

Terhadap (1 + 0) $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 430$

$(3 - 0)\, x_1 + 2x_3 + x_5 = 460$

$x_1 + 4x_2 + x_6 = 420$

$x_1, x_2, \ldots, x_6 > 0$

Di sini x_4, x_5, x_6 adalah variabel-variabel slack. Jika θ = 0 dan masalah program linier di atas diselesaikan dengan metode simpleks maka Tabel solusi adalah sebagai berikut:

Tabel 5. Solusi Nilai-Nilai Variabel

Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solusi
z	1	4	0	0	1	2	0	1350
x_2	0	−1/4	0	0	1/2	−1/4	0	100
x_2	0	3/2	0	1	0	1/2	0	230
x_6	0	2	0	0	−2	1	1	20

Disini $OXB = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 230 \\ 20 \end{pmatrix}$ dan

$${}^{O}B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Untuk θ > 0

$$\begin{aligned} ({}^{O}Z_1 - C_1) &= C_B \cdot {}^{O}B^{-1} \cdot {}^{O}P_1 - C_1 \\ &= (2, 5, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+\theta \\ 3-\theta \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \\ &= (1, 2, 0) \begin{pmatrix} 1+\theta \\ 3-\theta \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \geq 0 \end{aligned}$$

atau 4 − θ ≥ 0.

ini memberikan θ′ = 4.

Jadi masalah program llinier parametrik di atas pada vektor non basis P_1, solusi tetap optimal dengan nilai kritis pertama adalah 0 < θ < 4.

Dengan cara lain

Menentukan nilai kritis pertama θ > 0, karena parameter hanya dikaitkan pada vector non basis maka:

$$\text{CB} \cdot \text{OB}{-}1 \cdot \text{bj} = (2, 5, 0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (1, 2, 0)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

Jadi $\theta = \min\left\{ \frac{-\left({}^{O}Z_1 - C_1\right)}{C_B \cdot {}^{O}B^{-1}\, b_1} \middle| C_B \cdot {}^{O}B^{-1}\, b_1 < 0 \right\}$ =

$\min\left\{\frac{-4}{-1}\right\} = 4$

Sehingga masalah program linear parametric di atas pada vector non basis P1, solusi tetap optimal dengan nilai kritis pertama adalah 0 ≤ θ′ ≤ 4.

SIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa pada masalah program linier biasa konstanta program linier adalah tetap, maka pada program linier parametrik ini dapat dikatakan suatu masalah program linier yang konstantanya dapat berubah-ubah tanpa harus mengulangi perhitungan dari awal. Jadi dapat dihitung sekaligus dengan sekali perhitungan. Perhitungan program linier parametrik baik itu program linier fungsi objektif parametrik maupun pada program linier pembatas kanan parametrik dan program linier pembatas kiri parametrik, kita cari dahulu solusi optimal program linier tanpa parametrik. Jika ada solusi optimalnya maka kita dapat mencari interval-interval nilai-nilai parameter tersebut menjadi solusi optimal. Jika kita ingin merubah suatu konstanta pada masalah program linier parametrik tersebut, maka kita dapat merubah parameternya dan kemudian kita mencari nilai parameternya tersebut pada interval yang ada. Dan solusi optimalnya adalah solusi yang berkaitan dengan interval dimana parameter tersebut berada.

Berdasarkan kesimpulan penelitian, ada beberapa hal yang perlu peneliti sarankan yaitu agar peneliti selanjutnya dapat melakukan penelitian dengan cakupan yang lebih luas

DAFTAR PUSTAKA

Ayres, F. (1984). *Matriks*. Bandung: ITB.

Dhawan, S. (1975). *Linier Programming*. New Delhi.

Hadly, G. (1962). *Linier Programming*. Canada.

Indriani, D., Suyitno, H., & Mashuri. (2013). Analisis Metode Karmarkar Untuk Menyelesaikan Masalah Program Linier. *Jurnal Mipa*, *36*(1), 98–106.

Suwirmayanti, N. L. G. P. (2017). Aplikasi Optimasi Produksi Menggunakan Metode Simpleks Berbasis WEB. *Techno Com*, *17*(1), 61–69.

Taha, H. A. (2003). *Operations Research An Introduction*. New York: Macmillan Inc.

Windarti, T. (2013). Pemodelan Optimalisasi Produksi Untuk Memaksimalkan Keuntungan Dengan Menggunakan Metode Program Linier. *Spektrum Industri : Jurnal Ilmu Pengetahuan Dan Penerapan Teknik Industri*, *11*(2), 148–159.